Проблема контекста интерпретации в универсальной логике[1]

В. Л. Васюков

ABSTRACT. In [1] some categorical constructions were introduced which describe the inner structure of the category of logical systems. But detailed analysis reveals the problems which turn out to be caused by the insufficient account of the context of the investigation. Those defects are repaired and it is shown that all categorical constructions from [1] would be exploited up to equivalence introduced to reflect the practice of the mutual interpretations of logical systems.

1 Введение

В работе [1] было проведено исследование природы и структуры общего универсума возможных комбинаций всех логических систем, основываясь на концепции *универсальной логики* (см. [5, 6]), позволившее выдвинуть гипотезу относительно структуры подобного универсума. Универсальная логика представляет собой общую теорию логик, рассматриваемых как особая разновидность математических структур, по аналогии с тем, как универсальная алгебра рассматривает конкретные алгебраические системы. Теоретико-категорный подход, когда логические системы объединяются в категорию специального вида, снабжает нас некоторым фундаментом для исследования универсума универсальной логики. В рамках этого подхода удается ввести категорные конструкции, которые наряду с копроизведениями, лежащими в основе расслоения логик, описывают внутреннюю структуру категории логических систем. Как оказалось, универсум универсальной логики оказывается *паранепротиворечивым дополняющим топосом.*

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Проблема контекста в философской теории интерпретации»), проект № 07-03-00345а.

Однако полученные результаты нуждаются в корректировке, вызванной недостаточным учетом множественности контекста взаимной инетерпретации логических систем, влияющим на результат исследований. Проблемы, которые возникли при рассмотрении теоретико-категорных конструкций, описывающих структуру универсума универсальной логики[2], можно охарактеризовать следующим образом.

Кратко категорию сигнатур **Sig,** над которой надстраивается категория логических систем **Log**, можно определить следующим образом:

- *Объекты*: функции $\Sigma \to \mathbb{N}$, где Σ интуитивно понимается как множество связок, а функции — как ассоциирующие со связкой ее арность;

- *Морфизмы*: морфизм $\Sigma \to \Sigma'$ представляет собой гомоморфизм между абсолютно свободными алгебрами над Σ и Σ' соответственно. Иначе их можно описать как отображения $\Sigma \to F(\Sigma')$, сопоставляющие примитивной n-арной связке возможную *производную* n-арную связку.

Категория сигнатур в дальнейшем отождествляется с хорошо известной категорией $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$. Однако подобное сопоставление не совсем корректно. Объекты этих категорий действительно одни и те же, но этого нельзя сказать о морфизмах. Морфизмом между $f : \Sigma \to \mathbb{N}$ и $g : \Sigma' \to \mathbb{N}$ в $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$ будет функция $h : \Sigma \to \Sigma'$ (которая очевидным образом заставляет коммутировать треугольную диаграмму функций, т.е. имеет место $g \circ h = f$). Это означает, что связки из Σ не могут быть сопоставлены *производным* связкам, но только лишь исходным связкам из Σ'. В качестве примера рассмотрим случай, когда классическая логика представлена двумя наборами примитивных связок: $\{\neg, \wedge\}$ и $\{\neg, \vee\}$ соответственно. Морфизм в **Sig** должен сопоставить бинарной связке $\wedge$ другую бинарную связку, производную от примитивных связок из $\{\neg, \vee\}$. Если мы сопоставим $\wedge$

[2]Автор обязан Питеру Арендту указанием на возникающие теоретико-категорные трудности.

комбинацию $\neg(\neg(-) \vee \neg(-))$, то получим перевод между двумя представлениями классической логики, который будет изоморфизмом в категории **Log**, как этого следовало ожидать. С другой стороны, морфизм $f : \{\neg, \wedge\} \to \{\neg, \vee\}$ в $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$ должен сопоставлять примитивные связки из $\{\neg, \wedge\}$ примитивным связкам из $\{\neg, \vee\}$ и таким образом, учитывая арность, дожен сопоставить связку $\wedge$ связке $\vee$. Рассматривая отношение следования классической логики в языках, порожденных $\{\neg, \wedge\}$ и $\{\neg, \vee\}$ соответственно, мы видим, что на самом деле мы не получили перевода, поскольку, например, имеем $\{A \wedge B\} \vdash A$, но не $\{f(A \wedge B)\} = \{A \vee B\} \vdash A = f(A)$, где A, B — пропозициональные переменные. Таким образом, в категории логических систем **Log**, надстроенной над категорией сигнатур, вообще не существует морфизма между рассмотренными представлениями классической логики. Точно так же обычный $\neg\neg$-перевод классической логики в интуиционистскую не является морфизмом в $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$, но лишь в **Sig**.

При отождествлении **Sig** с $\mathbf{Set}/\mathbb{N}$ возникает и ряд других затруднений. Так, например, в этом случае в **Sig** не существует терминальный объект. Действительно, чтобы можно было получить морфизм из любой сигнатуры в терминальный объект, терминальная сигнатура Σ должна содержать по меньшей мере одну связку каждой арности. Отсюда в Σ должна существовать бинарная связка $*$, которая порождает две различные производные тернарные связки $(- * (- * -))$ и $((- * -) * -)$. Рассмотрим теперь сигнатуру Σ', состоящую из одной тернарной связки $\bigstar$. Имеется по меньшей мере два различных морфизма из Σ в Σ', а именно один, отображающий $\bigstar$ в $(- * (- * -))$, и другой, отображающий $\bigstar$ в $((- * -) * -)$ соответственно. Следовательно, Σ не будет терминальным объектом ввиду неединственности рассмотренного морфизма. Как следствие, категория **Log**, надстроенная над **Sig**, не может быть дополняющим топосом.

Чтобы преодолеть возникшие трудности, необходимо принять во внимание то обстоятельство, что неоднозначность представления логических систем является неустранимой их характеристикой. Как следствие, переводы одних логических систем в другие (их взаимная интерпретация) не единственны, и в тех случаях, когда требуется именно единственность перевода, приходится довольствоваться, следуя логической практике, конструкциями, справедливыми лишь с относительной точностью (точностью до некоторого условия). С этой целью на множестве переводов вводится отношение эквивалентности, позволяющее рассматривать категорные конструкции с точностью до введенной эквивалентности. Это позволяет выбирать в качестве требуемого той или иной конструкцией перевода один из класса эквивалентных переводов, часто не различая (как это обычно имеет место в практике теоретико-категорных рассмотрений, например, в [10]) перевод и класс эквивалентных ему переводов. Таким образом, переводимость логических систем требует от нас учета конкретной ситуации с имеющимися переводами между логическими системами, делая неустранимым влияние контекста этих переводов на получаемый результат. Структура универсума логических систем в универсальной логике оказывается контекстуально обусловленной.

Прежде чем приступить к систематическому изложению полученных результатов, во втором параграфе напомним понятие категории **Log** логических систем, которая будет использоваться в качестве основного инструмента на всем протяжении исследования.

В третьем параграфе рассматриваются *копроизведения* в **Log**, чья конструкция лежит в основании техники расслоения логических систем. Доказано, что *неограниченные расслоения* являются, по сути дела, копроизведениями в **Log**. При этом показывается, что все конструкции строятся лишь с точностью до эквивалентности, вводимой в результате специального рассмотрения.

Действуя дуально предыдущему случаю копроизведений, в четвертом параграфе введем понятие *произведений*, специальный случай требуемой нам конструкции расслоенного произведения, и понятие уравнителя (все с точностью до эквивалентности). Доказывается, что *неограниченные индексирования* представляют собой произведения в **Log**.

В пятом параграфе рассматривается конструкция экспоненциала и *коэкспоненциала*, дуального обычному экспоненциалу в декартовых категориях. Вводится понятие *возможной переводимости*, основанное на аналогии с техникой семантики возможной переводимости, и доказывается, что неограниченные возможные переводимости представляют собой коэкспоненциалы в **Log**, в то время как ограниченные возможные переводимости дают нам экспоненциалы в **Log**. В качестве примера подобного подхода рассматривается возможная переводимость трехзначной логики $\mathbf{P^1}$ в классическую логику.

Наконец, путем использования понятия *дополняющего классификатора*, разработанного К. Мортенсеном, показывается, что **Log** является одновременно и топосом, и *дополняющим топосом*, т.е. декартово замкнутой и декартовой козамкнутой категорией с обычным и дополняющим классификатором подобъектов.

2 Логические системы и пространства теорий

Напомним основной формализм, служащий фундаментом дальнейших исследований. Следуя [1, p. 101–103], рассмотрим логический язык, который свободно порожден некоторой сигнатурой, включающей в себя, как это обычно делается, конструкторы различной местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сигнатура представляет собой индексированное множество $\Sigma = \{\Sigma^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где каждое Σ^n является n-арным конструктором.

Будем считать, что множество пропозициональных переменных включено в Σ^0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Язык* над данной сигнатурой Σ, который будет обозначаться L_Σ, строится индуктивно обычным способом:

- $\Sigma^0 \subseteq L_\Sigma$;
- *если* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\Sigma$ *и* $c \in \Sigma^n$, *то* $c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L_\Sigma$.

Будем называть Σ-*формулами* элементы L_Σ, или просто *формулами,* когда Σ ясно из контекста.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Логическая система* является парой $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$, где Σ есть сигнатура, а $\vdash$ представляет собой оператор присоединения следствий в L_Σ (в смысле Тарского, см. [15]), то есть $\vdash\colon 2^{L_\Sigma} \to 2^{L_\Sigma}$ является функцией, обладающей следующими свойствами для каждых $\Gamma, \Phi \subseteq L_\Sigma$:

Экстенсивность: $\Gamma \subseteq \Gamma^\vdash$;
Монотонность : *если* $\Gamma \subseteq \Phi$, *то* $\Gamma^\vdash \subseteq \Phi^\vdash$;
Идемпотентность : $(\Gamma^\vdash)^\vdash \subseteq \Gamma^\vdash$.

Здесь $\Gamma^\vdash$ есть множество следствий Γ. Для сохранения общности не будем требовать здесь и в дальнейшем, чтобы оператор присоединения следствий был финитным, и тем более структурным.

Поскольку нам потребуется принимать во внимание выразительную силу данной логической системы, нам придется ссылаться на ее логические связки (примитивные или производные). Будем считать раз и навсегда зафиксированным множество $\Xi = \{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ метапеременных. Для данной сигнатуры Σ и $k \in \mathbb{N}$ будем рассматривать множество L^k_Σ определенным индуктивно:

- $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subseteq L^k_\Sigma$;
- $\Sigma^0 \subseteq L^k_\Sigma$;
- если $n \in \mathbb{N}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^k_\Sigma$ и $c \in \Sigma^n$, то $c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in L^k_\Sigma$.

Очевидным образом $L_\Sigma = L^0_\Sigma$. Для данного $\varphi_n \in L^k_\Sigma$ будем записывать как $\varphi(\xi_1\backslash\psi_1, \dots, \xi_k\backslash\psi_k)$ формулу, получаемую из φ одновременной заменой каждого вхождения ξ_1 в φ на ψ_i для каждого $i \leq k$.

Производная связка местности $k \in \mathbb{N}$ является λ-термом $d = \lambda\xi_1, \dots, \xi_k.\varphi$, где $\varphi \in L^k_\Sigma$. Обозначим через DC^k_Σ множество всех производных k-местных над Σ. Отметим, что если $c \in \Sigma^n$ является примитивной связкой, то она также может рассматриваться как производная связка $c = \lambda\xi_1, \dots, \xi_k.c(\xi_1, \dots, \xi_k)$. Для данной производной связки $d = \lambda\xi_1, \dots, \xi_k.\varphi$ будем писать $d(\psi_1, \dots, \psi_n)$ вместо $\varphi(\xi_1\backslash\psi_1, \dots, \xi_k\backslash\psi_k)$.

Различные языки, порожденные различными сигнатурами, могут переводиться друг в друга с помощью понятия морфизма, когда примитивные связки одной сигнатуры отображаются в производные связки другой сигнатуры с сохранением соответствующей местности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для данных сигнатур Σ_1 и Σ_2, *морфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является $\mathbb{N}$-индексированным семейством функций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to DC^n_{\Sigma_2}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Для данного морфизма сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ определяем его свободные расширения $h : L^k_{\Sigma_1} \to L^k_{\Sigma_2}$ для $k \in \mathbb{N}$ следующим образом:

- $h(\xi_i) = \xi_i$, если $\xi_i \in \Xi$;
- $h(c) = h^0(c)$, если $c \in \Sigma_1^0$;
- $h(c(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = h^0(c)(h(\varphi_1), \ldots, h(\varphi_n))$, если $c \in \Sigma_1^n$.

Функцию перевода h, удовлетворяющую вышеизложенным требованиям, будем называть *унифицированной.*

Сигнатуры и их морфизмы образуют категорию **Sig** с тождествами $id_\Sigma : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такими, что $id^n_\Sigma(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_k.c(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \Sigma^n$, а композиция морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ и $g : \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет определяться как $g \circ f : \Sigma_1 \to \Sigma_3$, такая, что $(g \circ f)^n(c) = \xi_1, \ldots, \xi_n.g(\varphi)$, полагая, что $f^n(c) = \lambda\xi_1, \ldots, \xi_n.\varphi$.

Удобство использования унифицированных переводов сказывается при формулировке понятия морфизма между логическим системами. Для данной функции $h : L_{\Sigma_1} \to L_{\Sigma_2}$ с $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$ мы будем рассматривать множество $h[\Phi] = \{h(\varphi) : \varphi \in \Phi\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. *Морфизм логических систем* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ представляет собой морфизм сигнатур $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, такой, что $h[\Phi^{\vdash_1}] \subseteq h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Логические системы и их морфизмы образуют конкретную категорию **Log** над **Sig**. Уместно напомнить следующую хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами, а $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ — **Log**-морфизмом. Тогда $h[\Phi^{\vdash_1}]^{\vdash_2} = h[\Phi]^{\vdash_2}$ для каждого $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.*

Теорией логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ является, как обычно, множество $\Phi \subseteq L_\Sigma$, такое, что $\Phi^\vdash = \Phi$. Обозначим как

$Th(\mathcal{L})$ множество всех теорий $\mathcal{L}$. Хорошо известно, что множество $Th(\mathcal{L})$, упорядоченное по отношению включения, всегда является полной решеткой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Пространство теорий* есть полная решетка $tsp = \langle Th, \leq \rangle$, то есть частичный порядок $\leq$ на множестве Th такой, что каждое $T \subseteq Th$ имеет наименьшую верхнюю грань (или пересечение) $\bigvee T$.

В частности, для данной логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ структура $tsp_{\mathcal{L}} = \langle Th(\mathcal{L}), \subseteq \rangle$ всегда будет пространством теорий (см., напр., [9]). Более того, переводы языков, ассоциированные с морфизмами логических систем, всегда действуют на операторы присоединения следствий таким образом, что в соответствующих пространствах теорий сохраняются пересечения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий. *Морфизм пространств теорий* $h : tsp_1 \to tsp_2$ представляет собой функцию $h : Th_1 \to Th_2$, такую,что $h(\bigvee_1 T) = \bigvee_2 h[T]$ для каждого $T \subseteq Th$.

Следующая формулировка представляет собой хорошо известную полезную лемму.

ЛЕММА 9. *Пусть $tsp_1 = \langle Th_1, \leq_1 \rangle$ и $tsp_2 = \langle Th_2, \leq_2 \rangle$ будут пространствами теорий и $h : tsp_1 \to tsp_2$ будет морфизмом пространств теорий. Тогда h сохраняет порядок, то есть для каждого $\Phi, \Gamma \in Th_1$, если $\Phi \leq_1 \Gamma$, то $h(\Phi) \leq_2 h(\Gamma)$.*

Пространства теорий и их морфизмы ообразуют категорию **Tsp** с обычными тождествами и композицией функций. Более того, определение пространства теорий, индуцированного логической системой, может быть расширено на случай функтора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Отображения

- $Th(h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2) : tsp_1 \to tsp_2$, с $Th(h)(\Phi) = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *в* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *для каждого* $\Phi \in Th(\mathcal{L}_1)$

образуют функтор Th : **Log**$\to$**Tsp**.

Нетрудно показать, что Th представляет собой сопряженный функтор, но более интересно для нас понятие *эквиполлентности*, основанное на Th (см. [5, p. 107]), которое позволяет описать «сходство» логических систем. Но вначале напомним характеристику изоморфизма в категории сигнатур **Sig**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Две сигнатуры* Σ_1 *и* Σ_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда семейство биекций* $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

В свою очередь, характеристика изоморфизма в **Log** следующая.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Две логические системы* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм сигнатур* $h : \Sigma_1 \to \Sigma_2$*, такой, что* $h[\Phi^{\vdash_1}] = h[\Phi]^{\vdash_2}$ *для каждого* $\Phi \subseteq L_{\Sigma_1}$.

Наконец, с помошью следующего определения можно ввести понятие *эквиполлентности*:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Две логические системы $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ эквиполлентны, если существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, такие, что $Th(h)$ и $Th(g)$ устанавливают изоморфизм между $tsp_{\mathcal{L}_1}$ и $tsp_{\mathcal{L}_2}$ в случае $Th(h) = Th(g)^{-1}$.

Фактически изоморфизмы в **Log** образуют специальный случай эквиполлентности и эквиполлентные логические системы всегда требуются для определения изоморфности логических пространств. Более того, можно дать альтернативную характеристику эквиполлентности в терминах внутреннего понятия логической эквивалентности каждой логической системы $\mathcal{L} = \langle \Sigma, \vdash \rangle$ следующим образом. Говорят, что две формулы $\varphi, \psi \in L_\Sigma$ *логически эквивалентны* в $\mathcal{L}$, $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \psi$, если одновременно имеет место $\varphi \in \{\psi\}^{\vdash}$ и $\psi \in \{\varphi\}^{\vdash}$, или, что равносильно, если $\{\varphi\}^{\vdash} = \{\psi\}^{\vdash}$. Следующая лемма из [1, p. 108] показывает, что теории системы $\mathcal{L}$ фактически независимы, по модулю логически эквивалентных формул, от способа их представления.

ЛЕММА 14. *Пусть* $\Phi, \Gamma \subseteq L_\Sigma$. *Тогда* $\Phi^{\vdash} = \Gamma^{\vdash}$ *всякий раз, когда выполняются следующие два условия:*

- *для каждой* $\varphi \in \Phi$ *существует* $\varphi' \in \Gamma$, *такая, что* $\varphi \equiv_{\mathcal{L}} \varphi'$;
- *для каждой* $\psi \in \Gamma$ *существует* $\psi' \in \Phi$, *такая, что* $\psi \equiv_{\mathcal{L}} \psi'$.

Альтернативная характеристика понятия эквиполлентности может быть дана с помощью следующего определения [1, p. 108].

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Пусть* $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ *и* $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ *являются логическими системами. Тогда* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют* ***Log****-морфизмы* $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ *и* $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$*, такие, что выполняются следующие два условия:*

- $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ *для каждой* $\varphi \in L_{\Sigma_1}$;
- $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ *для каждой* $\psi \in L_{\Sigma_2}$.

3 Копроизведения и расслоения в Log

Во многих работах категория **Sig** определяется иначе, чем это было сделано в предыдущем разделе, при $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в качестве морфизма сигнатур. В этом случае часто отмечается (см., напр., [4, p. 153]), что такая категория **Sig*** является хорошо известной категорией $\mathbb{N}$-индексированных множеств и сохраняющих индексы отображений **Set**/$\mathbb{N}$. Как следствие, для **Sig***справедливо следующее:

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Категория* ***Sig*** *является (малой) кополной категорией.*

В частности, в **Sig** имеются копроизведения и амальгамы[3]. Первые позволяют нам объединить две сигнатуры с различными конструкторами, в то время как последние могут быть использованы для объединения конструкторов. Но имеются ли у нас такие конструкции в **Sig***? На первый взгляд кажется, что это не так. Действительно, мы можем попробовать определить копроизведения, характеризуя их следующим образом:

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Копроизведение двух сигнатур* Σ_1 *и* Σ_2

является сигнатурой $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$*, наделенной инъекциями* $i_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ *и* $i_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$*, такими, что для каждого* $k \in N$*:*

[3]Термин «амальгама» взят из книги Р. Гольдблатта «Топосы. Категорный анализ логики» [2]. В русском переводе книги С. Маклейна «Категории для работающего математика» (М., 2004) употребляется термин «универсальный квадрат», в то время как в англоязычной литературе употребляется термин «direct image», что можно перевести как «прямой образ».

- $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *есть дизъюнктивное объединение* Σ_1^k *и* Σ_2^k*;*
- i_1^k *и* i_2^k *являются инъекциями* Σ_1^k *и* Σ_2^k *на* $(\Sigma_1 \oplus \Sigma_2)^k$ *соответственно.*

Главная проблема при доказательстве этого утверждения связана с единственностью стрелки $[f, h] : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma$ (для произвольной пары морфизма сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma, h : \Sigma_2 \to \Sigma$), которая требуется для того, чтобы $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ представляла собой копроизведение. Ясно, что никакой гарантии этой единственности не существует, поскольку конструкция морфизма сигнатур в **Sig** использует множество производных связок в качестве области значения, в отличие от случая **Sig*** со множеством примитивных связок в качестве области определения. В качестве примера напомним рассмотренный во введении случай двух представлений классической логики.

Единственным выходом для нас является введение понятия эквивалентности морфизмов. С этой целью воспользуемся следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Эквивалентностью **Sig**-морфизмов является наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- $f \equiv g$ *тогда и только тогда, когда* $dom(f) \cong dom(g)$ *и* $codom(f) \cong codom(g)$, *т.е.* Σ_1 *и* Σ_2 *изоморфны, так же как и* Σ_1' *и* Σ_2', *для морфизмов сигнатур* $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2, f' : \Sigma_1' \to \Sigma_2'$;
- $gf = h$ *влечет* $gf \equiv h$;
- $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$ *влечет* $gf \equiv g'f'$;
- $fid_{\Sigma_1} \equiv f \equiv id_{\Sigma_2} f$;
- $(hg)f \equiv h(gf)$

для всех $f, f' : \Sigma_1 \to \Sigma_2, g, g' : \Sigma_2 \to \Sigma_3, h : \Sigma_3 \to \Sigma_4$.

Первое условие мы, согласно Утверждению 11, можем переписать как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда существует семейство биекций $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_1^{n\prime}\}_{n \in \mathbb{N}}$ наряду с семейством биекций $h' = \{h'^n : \Sigma_2^n \to \Sigma_2^{n\prime}\}_{n\in\mathbb{N}}$ для морфизмов сигнатур $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2, f' : \Sigma_1' \to \Sigma_2'$. Таким образом, не требуя единственности стрелки $[f, h] : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma$, мы можем сказать, что $[f, h]$ определяется с точностью до эквивалентности и что копроизведения в **Sig** также определяются с точностью до эквивалентности. Фактически Определение 18 следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Sig**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $[f, g] = h$, *то* $[f, g] \equiv h$ *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $[gf] \equiv [g'f']$;
- $[f, g]i_1 \equiv f, [f, g]i_2 \equiv g$ *и т.д.*

для всех $f, f' : \Sigma_1 \to \Sigma_3, g, g' : \Sigma_2 \to \Sigma_3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. *Амальгама двух инъективных морфизмов сигнатур с одним и тем же началом* $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$ *и* $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ *есть сигнатура* $\Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$ *, наделенная морфизмами* $g_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1\Sigma f_2} \Sigma_2$ *и* $g_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus^{f_1\Sigma f_2} \Sigma_2$, *такими, что для каждого* $k \in \mathbb{N}$*:*

- $(\Sigma_1 \oplus^{f_1\Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ *есть* $\Sigma^k \cup i_1^k(\Sigma_1^k \backslash f_1(\Sigma^k)) \cup i_2^k(\Sigma_2^k \backslash f_2(\Sigma^k))$;
- $g_1^k(c_1) \;=\{ \begin{array}{ll} i_1^k(c_1) & \textit{если } c_1 \notin f_1^k(\Sigma^k) \\ (f_1^k)^{-1}(c_1) & \textit{в противном случае} \end{array}$, *и аналогично для* g_2^k.

Доказательство. Очевидным образом $g_1^k f_1^k = g_2^k f_2^k$. Второе требование, чтобы для любых $h : \Sigma_1 \to \Sigma_3$ и $j : \Sigma_2 \to \Sigma_3$, таких, что $hf_1 = jf_2$, существовал единственный $q : \Sigma_1 \oplus^{f_1\Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_3$, удовлетворяющий $h^k = q^k g_1^k$ и $j^k = q^k g_2^k$, может быть выполнено только с точностью до эквивалентности. То есть мы можем выбрать q только с точностью до эквивалентности и соответственно имеем $h \equiv g_1 q$ и $j \equiv g_2 q$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *Коуравнителем двух морфизмов сигна-*

тур с одним и тем же началом и концом $f, g : \Sigma \to \Sigma_1$ *является сигнатура* $\Sigma_1/\equiv^{f,g}$*, снабженная морфизмом* $q : \Sigma_1 \to \Sigma_1/\equiv^{f,g}$*, таким, что*

- $(\Sigma_1/\ \equiv^{f,g})^k$ *есть фактор-множество* $\Sigma_1^k(\equiv^{f,g})^k$*, где* $(\equiv^{f,g})^k$ *является наименьшим отношением эквивалентности на* Σ_1^k*, содержащим* $\{\langle f^k(c),\ g^k(c)\rangle : c \in \Sigma^k\}$*;*
- $q^k(c_1)$ *является* $(\equiv^{f,g})^k$*-классом эквивалентности для* $c_1 \in \Sigma_1^k$*.*

Доказательство. Отношение $(\equiv^{f,g})^k$ может быть определено на основе $\equiv$, поскольку $f \equiv g$ предполагает $h = \{h^n : \Sigma_1^n \to \Sigma_1^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{h^n : f[\Sigma^n] \to g[\Sigma^n]\}_{n\in\mathbb{N}}$. Q.E.D.

В дальнейшем полезным будет следующий факт: амальгама двух морфизмов $f_1 : \Sigma \to \Sigma_1$ и $f_2 : \Sigma \to \Sigma_2$ может быть получена вначале конструированием копроизведения $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, снабженного инъекциями $i_1 : \Sigma_1 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ и $i_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$, а затем нахождением коуравнителя $i_1 \circ f_1$ и $i_2 \circ f_2$.

Для рассмотрения неограниченных расслоений в **Log** мы используем конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что метапеременные играют важную роль в получении точной конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2\rangle$ будут логическими системами. Тогда их неограниченным расслоением является логическая система $\langle \Sigma_1, \vdash_1\rangle \oplus \langle \Sigma_2, \vdash_2\rangle = \langle \Sigma_1 \oplus \Sigma_2, \vdash_{1\oplus 2}\rangle$, где $\vdash_{1\oplus 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\oplus 2}$: $2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}} \to 2^{L_{i_1(\Sigma_1)\cup i_2(\Sigma_2)}}$, такой, что

- $\Gamma \vdash_i \varphi$ *влечет* $\Gamma \vdash_{1\oplus 2} \varphi$ *для всех* $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$*;*

и i_1, i_2 *являются инъекциями копроизведения* $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$*.*

Теперь, поскольку мы будем иметь дело с **Log**, то мы должны перейти от $\equiv$ к соответствующему отношению (которое мы также будем обозначать $\equiv$), основанному на эквиполлентности логических систем вместо изоморфизма сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Тождество **Log**-морфизмов представляет собой наименьшее отношение эквивалентности $\equiv$ между морфизмами, такое, что

- *$f \equiv g$ тогда и только тогда, когда $dom(f)$ эквиполлентна $dom(g)$ и $codom(f)$ эквиполлентна $codom(g)$*, т.е. *$\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквиполлентны, так же как и $\mathcal{L}'_1$ эквиполлентна $\mathcal{L}'_2$, для морфизмов логических систем $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, f' : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}'_2$;*

- *$gf = h$ влечет $gf \equiv h$;*

- *$f \equiv f'$ и $g \equiv g'$ влечет $gf \equiv g'f'$;*

- *$fid_{\Sigma_1} \equiv f \equiv id_{\Sigma_2}f$;*

- *$(hg)f \equiv h(gf)$*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3, h : \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_4$.

Согласно Утверждению 15 $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ эквиполлентны тогда и только тогда, когда существуют **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ и $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для всякой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}_2} h(g(\psi))$ для всякой $\psi \in L_{\Sigma_2}$. Отсюда первое условие Определения 23 может быть переписано как $f \equiv g$ тогда и только тогда, когда имеются, во-первых, **Log**-морфизмы $h : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}'_1$ и $g : \mathcal{L}'_1 \to \mathcal{L}_1$, такие,что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_1} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_1}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_1} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_1}$, и, во-вторых, **Log**-морфизмы $h' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}'_1$ и $g' : \mathcal{L}'_2 \to \mathcal{L}_2$, такие, что $\varphi \equiv_{\mathcal{L}_2} g(h(\varphi))$ для любой $\varphi \in L_{\Sigma_2}$ и $\psi \equiv_{\mathcal{L}'_2} h(g(\psi))$ для любой $\psi \in L_{\Sigma'_2}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 24. *Неограниченные расслоения являются копроизведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Инъекции i_1 и i_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5.
2) *Универсальность.*
Пусть $h_1 : \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \to \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle, h_2 : \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle \to \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k_1 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_3$, $k_2 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будут морфизмами в **Sig**, такими, что $k_1 \equiv k_2$, $k_1 i_1 = h_1$ и $k_2 i_2 = h_2$. Тогда k_1, k_2 являются морфизмами в **Log**, $k_1 \equiv k_2$ и они таковы, что $k_1 i_1 = h_1$ и $k_2 i_2 = h_2$. Следовательно, неограниченные расслоения являются копроизведениями в **Log** с точностью до эквивалентности $\equiv$. Q.E.D.

Теперь Определение 23 должно быть расширено следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $[f,g]=h$, *то* $[f,g]\equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f\equiv f'$ *и* $g\equiv g'$, *то* $[gf]\equiv[g'f']$;
- $[f,g]i_1\equiv f, [f,g]i_2\equiv g$, *и т.д.*

для всех $f,f':\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2, g,g':\mathcal{L}_2\to\mathcal{L}_3$.

Когда надо совместно использовать (объединить) конструкторы, то расслоение ограничивается за счет введения какого-то взаимодействия между двумя логическими системами. Техника подъема морфизмов по кодекартовому квадрату снабжает нас средствами получения объединения, определенного на уровне сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. Пусть $\mathcal{L}=\langle\Sigma,\vdash\rangle,\mathcal{L}_1=\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2=\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle$ *будут логическими системами и* $f_1:\Sigma\to\Sigma_1, f_2:\Sigma\to\Sigma_2$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *ограниченным совмещенным расслоением* является $\mathcal{L}_{1\ominus2}=\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle\oplus^{f_1\Sigma f_2}\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle=\langle\Sigma_1\oplus^{f_1\Sigma f_2}\Sigma_2,\vdash_{(1\ominus2)}\rangle=q(\langle\Sigma_1,\vdash_1\rangle\oplus\langle\Sigma_2,\vdash_2\rangle)$, где

- *морфизм сигнатур* $q:\Sigma_1\oplus\Sigma_2\to\Sigma_1\oplus^{f_1\Sigma f_2}\Sigma_2$ *является коуравнителем* $i_1\circ f_1:\Sigma\to\Sigma_1\oplus\Sigma_2$ *и* $i_2\circ f_2:\Sigma\to\Sigma_1\oplus\Sigma_2$*;*
- $\vdash_{1\ominus2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1\ominus2}$: $2^{L_{\Sigma\cup i_1(\Sigma_1\setminus f_1(\Sigma))\cup i_2(\Sigma_2\setminus f_2(\Sigma))}}\longrightarrow 2^{L_{\Sigma\cup i_1(\Sigma_1\setminus f_1(\Sigma))\cup i_2(\Sigma_2\setminus f_2(\Sigma))}}$;
- $\mathcal{L}_{1\ominus2}$ *является наименьшей системой для* $tsp_{\mathcal{L}_{1\ominus2}}=\langle Th(\mathcal{L}_{1\ominus2}),\subseteq\rangle$, *в которой* $\Gamma\vdash_i\varphi$ *влечет* $\Gamma\vdash_{1\ominus2}\varphi$ *для каждого* $\Gamma\cup\{\varphi\}\in L_{\Sigma_i}(i=1,2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 27. *Ограниченные расслоения являются амальгамами в* ***Log***.

Доказательство. 1) f_1 и f_2 являются инъективными морфизмами в **Log** согласно Определению 5.
2) *Универсальность.*

Пусть $h_1 : \langle\Sigma_1, \vdash_1\rangle \to \langle\Sigma_3, \vdash_3\rangle$ будет морфизмом в **Log**, таким, что $\Gamma \vdash_1 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_3 \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Пусть $k_1 : \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \to \Sigma_3$ будет морфизмом в **Sig**, таким, что $k_1 i_1 = h_1$. Тогда k_1 представляет собой морфизм в **Log**, такой, что $k_1 i_1 = h_1$. Поскольку q есть коуравнитель $i_1 f_1$ и $i_2 f_2$ в **Sig**, то всегда существует (с точностью до эквивалентности) морфизм $l : \Sigma_1 \oplus^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_3$. Очевидным образом это влечет, что имеется **Log**-морфизм $l : \mathcal{L}_{1\ominus 2} \to \langle\Sigma_3, \vdash_3\rangle$, поскольку $\mathcal{L}_{1\ominus 2}$ nредставляет собой наименьшую систему для $tsp_{\mathcal{L}_{1\ominus 2}}$ со свойством, что $\Gamma \vdash_1 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_{1\ominus 2} \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Следовательно, ограниченные расслоения являются амальгамами в **Log** (с точностью до эквивалентности $\equiv$). Q.E.D.

Совмещение логических операторов отражается, в первую очередь, на синтаксисе расслоенной логики. Но поскольку допускается совмещение как пропозициональных символов, так и логических операторов, то совмещение логических операторов дает нам способ наложения ограничений путем постулирования взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующе изменения) можно найти в [14].

4 Произведения и индексирования в Log

Известно, что в категории **Sig*** имеются произведения и обратные образы. Действуя дуально случаю копроизведений, определим произведения, специальный случай требуемых нам обратных образов и уравнитель (с точностью до изоморфизма) следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 28. *Произведение двух сигнатур Σ_1 и Σ_2 представляет собой сигнатуру $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженную проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:*

- $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ *есть* $\Sigma_1^k \times \Sigma_2^k$;
- pr_1^k *и* pr_2^k *являются инъективными проекциями* $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^k$ *в* Σ_1^k *и* Σ_2^k*, соответственно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. *Обратный образ* двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и f_2 :

$\Sigma_2 \to \Sigma$ есть сигнатура $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, снабженная морфизмами $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_2$, такими, что для каждого $k \in \mathbb{N}$:

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ *есть* $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_1)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

Вновь мы должны принять во внимание, что это предложение будет верным только с точностью до эквивалентности, и мы должны расширить Определение 19 следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Sig**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям::

- *если* $\langle f, g \rangle = h$, *то* $\langle f, g \rangle \equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $\langle gf \rangle \equiv \langle g' f' \rangle$;
- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f, pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \Sigma_1 \to \Sigma_2, g, g' : \Sigma_1 \to \Sigma_3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 31. *Обратным образом двух инъективных морфизмов сигнатур с одинаковым концом* $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ *и* $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ *является сигнатура* $\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, *снабженная морфизмами* $g_1 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1$ *и* $g_2 : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_2$, *такими, что для каждого* $k \in \mathbb{N}$*:*

- $(\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2)^k$ *есть* $\{\langle pr_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle), pr_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) : f_1^k(c_1) = f_2^k(c_1)\}$
- $g_1^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_1, g_2^k(\langle c_1, c_2 \rangle) = c_2$.

Доказательство. Очевидным образом $f_1^k g_1^k = f_2^k g_2^k$. Второе требование, чтобы для любых $h : \Sigma_3 \to \Sigma_1$ и $j : \Sigma_3 \to \Sigma_2$, таких, что $f_1 h = f_2 j$, существует единственный $q : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$, удовлетворяющий $h^k = f_1^k q^k$ и $j^k = f_2^k q^k$, может быть выполнено только с точностью до эквивалентности. То есть мы можем выбрать q лишь с точностью до эквивалентности и соответственно имеем $h \equiv f_1 q$ и $j \equiv f_2 q$. Q.E.D.

УТВЕРЖДЕНИЕ 32. *Уравнитель двух сигнатур с одинаковым началом и концом* $f, g : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ *является сигнатурой* Σ, *снабженной морфизмом* $q : \Sigma \to \Sigma_1$, *таким, что*

- Σ^k *является множеством* $\{c \in \Sigma_1^k : f^k(c_1) = g^k(c_1)\}$;
- $f^k q^k = g^k q^k$.

Доказательство. Нам нужно лишь убедиться, что для любого морфизма сигнатур $h : \Sigma' \to \Sigma_1$, удовлетворяющего условию $f^k h^k = g^k h^k$, имеется (с точностью до эквивалентности) морфизм $j : \Sigma' \to \Sigma$, такой, что $h^k \equiv q^k j^k$. Но это очевидно. Q.E.D.

Следующий факт пригодится в дальнейшем: обратный образ двух морфизмов $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma$ и $f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ может быть получен вначале построением произведения $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, снабженного проекциями $pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_1$ и $pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma_2$, а затем получением уравнителя $f_1 \circ pr_1$ и $f_2 \circ pr_2$.

Рассмотрение неограниченного индексирования (*unconsrained labelling*) в **Log** (понятие индексированных дедуктивных систем см. в [12]) требует использования конструкторов и операторов присоединения следствий из обеих логических систем. Заметим, что использование метапеременных необходимо для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда их неограниченным индексированием является $\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \vdash_{1\otimes 2} \rangle$, где $\vdash_{1\otimes 2}$ есть оператор присоединения следствий $\vdash_{1\otimes 2}$: $2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}} \to 2^{L_{pr_1(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\times pr_2(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)}}$, такой, что

- $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle \vdash_{1\otimes 2} \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i} (i = 1, 2)$;

а pr_1, pr_2 *являются проекциями произведения* $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 34. *Неограниченные индексирования являются произведениями в* ***Log***.

Доказательство. 1) Проекции pr_1 и pr_2 являются морфизмами в **Log** согласно определению 5.

2) *Универсальность.*
Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle, h_2 : \langle \Sigma_3, \vdash_3 \rangle \to \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут произвольными морфизмами в **Log**. Пусть $k_1 : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, k_2 : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будут морфизмами в **Sig**, такими, что $k_1 \equiv k_2$, $pr_1 \circ k_1 = h_1$ и $pr_2 \circ k_2 = h_2$. Тогда k_1, k_2 являются морфизмами в **Log** и они таковы, что $k_1 \equiv k_2, pr_1 \circ k_1 = h_1$ и $pr_2 \circ k_2 = h_2$. Следовательно, неограниченные индексирования являются произведениями в **Log** с точностью до эквивалентности $\equiv$. Q.E.D.

Теперь определение $\equiv$ в **Log** следует расширить следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Отношение эквивалентности $\equiv$ между **Log**-морфизмами, рассмотренное выше, должно также удовлетворять следующим условиям:

- *если* $\langle f, g \rangle = h$, *то* $\langle f, g \rangle \equiv h$, *и т.д.;*
- *если* $f \equiv f'$ *и* $g \equiv g'$, *то* $\langle gf \rangle \equiv \langle g' f' \rangle$;
- $pr_1 \langle f, g \rangle \equiv f, pr_2 \langle f, g \rangle \equiv g$, *и т.д.*

для всех $f, f' : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, g, g' : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$.

Если нам нужно отождествить конструкторы, то мы накладываем ограничение на индексирование с помощью введения взаимодействия между двумя данными логическими системами. Средствами получения отождествления на уровне сигнатур снабжает нас техника подъема морфизмов по декартовому квадрату.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами и $f_1 : \Sigma_1 \to \Sigma, f_2 : \Sigma_2 \to \Sigma$ будут инъективными морфизмами сигнатур. Тогда их *ограниченным индексированием* является

$\mathcal{L}_{1 \odot 2} = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle = \langle \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2, \vdash_{1 \odot 2} \rangle = q(\langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle \otimes \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle)$, *где*

- $q : \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ *является уравнителем* $f_1 pr_1 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$ *и* $f_2 pr_2 : \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \to \Sigma$;
- $\vdash_{1 \odot 2}$ *есть оператор присоединения следствий* $\vdash_{1 \odot 2}$: $2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}} \to 2^{L_{\Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2}}$;

- $\mathcal{L}_{1\odot 2}$ *есть наименьшая система для* $tsp_{\mathcal{L}_{1\odot 2}} = \langle Th(\mathcal{L}_{1\odot 2}), \subseteq\rangle$, *в которой*

$\langle \Gamma_1, \Gamma_2\rangle \vdash_{1\odot 2} \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ *влечет* $\Gamma_i \vdash_i \varphi_i$ *для каждого* $\Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \in L_{\Sigma_i}(i = 1, 2)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 37. *Ограниченные индексирования являются обратными образами в **Log**.*

Доказательство. 1) f_1 и f_2 являются инъективными морфизмами в **Log** согласно Определению 5.
2) *Универсальность.*
Пусть $h_1 : \langle \Sigma_3, \vdash_3\rangle \to \langle \Sigma_1, \vdash_1\rangle$ будет морфизмом в **Log**, таким, что $\Gamma \vdash_3 \varphi$ влечет $\Gamma \vdash_1 \varphi$ для каждого $\Gamma \cup \{\varphi\} \in L_{\Sigma_1}$. Пусть $k_1 : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ будет морфизмом в **Sig**, таким, что $pr_1 k_1 = h_1$. Тогда k_1 является морфизмом в **Log**, таким, что $pr_1 k_1 = h_1$. Поскольку q является уравнителем $f_1 pr_1$ и $f_2 pr_2$ в **Sig**, то всегда существует (с точностью до эквивалентности) морфизм $l : \Sigma_3 \to \Sigma_1 \otimes^{f_1 \Sigma f_2} \Sigma_2$. Очевидным образом это влечет, что существует **Log**-морфизм $l : \langle \Sigma_3, \vdash_3\rangle \to \mathcal{L}_{1\odot 2}$, поскольку $\mathcal{L}_{1\odot 2}$ является наименьшей системой для $tsp_{\mathcal{L}_{1\odot 2}}$, такой, что $\langle \Gamma_1, \Gamma_2\rangle \vdash_{1\odot 2} \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ влечет $\Gamma_1 \vdash_1 \varphi_1$ для каждого $\Gamma_1 \cup \{\varphi_1\} \in L_{\Sigma_1}$. Следовательно, ограниченные индексирования являются обратными образами в **Log** (с точностью до эквивалентности $\equiv$). Q.E.D.

Отождествление логических операторов прежде всего отражаеся на синтаксисе логики с индексированием. Но поскольку мы допускаем отождествление как пропозициональных символов, так и логических операторов, то отождествление логических операторов может снабдить нас способом формулировки некоторого взаимодействия между двумя логиками. Примеры (внося соответствующе изменения) можно найти в [1].

5 Коэкспоненциалы, экспоненциалы и возможные переводимости в Log

Техника *семантики возможной переводимости* (см. [8]) подсказывает нам, как получить конструкцию *коэкспоненциала* в **Log**, проводя синтаксическую параллель с основной идеей этой семантики. В этом случае, заменяя $\models$ на $\vdash$, мы получаем формулировку понятия *возможной переводимости* в следующем виде: для логических систем $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1\rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2\rangle$ имеет место $\Gamma \vdash_1^* \varphi$ тогда и только тогда, когда $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ для всех переводов $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$. Таким образом, чтобы рассмотреть *возможные переводы* в **Log**, нам потребуются конструкторы и операторы присоединения следствий из обеих логических систем. Вновь использование метапеременных существенно для точности конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда неограниченная возможная переводимость $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ есть система ${}^{\mathcal{L}_2}\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_{1\Leftarrow 2} \rangle$, где $\vdash_{1\Leftarrow 2}$ означает $\vdash_{1\Leftarrow 2}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$, такое, что

- $\Gamma \vdash_{1\Leftarrow 2} \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $g[\Gamma] \vdash_2 g(\varphi)$ *для всех* **Log**-*морфизмов* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$.

Напомним, что категория допускает коэкспоненцирование, если в ней существует копроизведение любых двух объектов и для любых двух объектов a, b имеется объект ${}^a b$, называемый коэкспоненциалом, и стрелка $ev^\circ : b \to {}^a b + a$ (стрелка кооценки), такая, что для любого объекта c и стрелки $g : b \to c + a$ имеется единственная стрелка $\breve{g} : {}^a b \to c$, такая, что $(\breve{g} + id_a) \circ ev^\circ = g$. Если в качестве примера категории с экспонецированием обычно берут алгебру Гейтинга, рассматриваемую категорно (т.е. как категорию предпорядка с произведениями и копроизведениями), где экспоненциалом будет импликация Гейтинга, являющаяся псевдодополнением a относительно b (см. [2]), то в качестве примера категории с коэкспоненцированием в этом случае можно рассматривать алгебру Брауэра, где в роли коэкспоненциала выступает брауэровская импликация $a \Longleftarrow b$, являющаяся псевдоразностью b и a (см., напр., [3]). Наконец, примером категории с экспоненцированием и коэкспоненцированием будет так называемая алгебра Гейтинга–Брауэра, представляющая собой алгебру Гейтинга, пополненную брауэровской импликацией (см. [13]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 39. *Неограниченные возможные переводимости являются коэкспоненциалами в* ***Log***.

Доказательство. Нам нужно рассмотреть морфизм кооценки $ev^\circ : \mathcal{L}_1 \to {}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2$, морфизмы $\breve{g} : {}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_3$, $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_3 \oplus \mathcal{L}_2$ и условия коммутирования диаграммы коэкспоненцирования (с точностью до эквивалентности). Поскольку согласно определению ${}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2$ мы имеем, что $\vdash_{1\Leftarrow 2}$ максимально отражает $\vdash_1$(для всех возможных морфизмов $g : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ мы получаем $g[\Gamma^{\vdash_2}] \subseteq g[\Gamma]^{\vdash_1} = g[\Gamma^{\vdash_2}]^{\vdash_1}$ и, таким образом, $\Gamma^{\vdash_{1\Leftarrow 2}}$ будет больше, чем $\Gamma^{\vdash_2}$), то конструкция $\breve{g}$ всегда будет давать нам возможность максимального отображения $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_3$. В частности, это может быть предельным случаем полного перевода $\mathcal{L}_1$, т.е. $g(\mathcal{L}_1) = \breve{g}({}^{\mathcal{L}_1}\mathcal{L}_2) \subseteq \mathcal{L}_3$, так же как предельный случай $g(\mathcal{L}_1) = ev^{\circ}(\mathcal{L}_1) \subseteq \mathcal{L}_2$. Q.E.D.

Мы можем улучшить и сделать более точной переводимость, налагая некоторые ограничения на свободные расширения морфизмов между двумя данными логическими системами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. Пусть $\mathcal{L}_1 = \langle \Sigma_1, \vdash_1 \rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle \Sigma_2, \vdash_2 \rangle$ будут логическими системами. Тогда ограниченной возможной переводимостью $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$ является система $\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2} = \langle \Sigma_1, \vdash_{2\Longrightarrow 1} \rangle$, где $\vdash_{2\Longrightarrow 1}$означает $\vdash_{2\Longrightarrow 1}$: $2^{L_{\Sigma_1}} \to 2^{L_{\Sigma_1}}$, такой, что

- $\Gamma \vdash_{2\Longrightarrow 1} \varphi$ *если и только если существуют* **Log**-*морфизмы* $h : \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ *and* $g : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, *такие, что* $h(g[\Gamma])) \vdash_1 h(g(\varphi))$.

Очевидным образом, если $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ аксиоматизируемы (т.е. существуют такие Γ_1 и Γ_2 соответственно, что для любых $\varphi \in L_{\Sigma_1}, \psi \in L_{\Sigma_2}$ и $\Delta \subseteq L_{\Sigma_1}, \Phi \subseteq L_{\Sigma_2}$ мы имеем, что если $\varphi \in (\Delta)^{\vdash_1}, \psi \in (\Phi)^{\vdash_2}$, то $\varphi \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}, \psi \in (\Gamma_2)^{\vdash_2}$), то в определении выше $\Gamma \vdash_{2\Longrightarrow 1} \varphi$ всякий раз, когда $h(g(\varphi)) \in (\Gamma_1)^{\vdash_1}$. Заметим, что в случае неограниченных возможных переводимостей мы используем только **Log**-морфизмы из $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 41. *Ограниченные возможные переводимости являются экспоненциалами в* ***Log***.

Доказательство. Нам нужно рассмотреть морфизм оценки $ev : \mathcal{L}_1^{\mathcal{L}2} \otimes \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$, морфизмы $\hat{g} : \mathcal{L}_3 \to \mathcal{L}_1^{\mathcal{L}_2}, g : \mathcal{L}_3 \otimes \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ и условия коммутирования диаграммы экспоненцирования (с точностью до эквивалентности). Мы имеем, что $L_{\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}2} \otimes \mathcal{L}_2}$ должна характеризоваться парами $\langle h(\varphi), \varphi \rangle$ и, таким образом, $ev(\langle h(\varphi), \varphi \rangle)$, в свою очередь, будет $h(\varphi)$. Для $\hat{g}$ мы всегда получаем

$\hat{g}[\Phi^{\vdash 3}]^{2\Longrightarrow 1} = \hat{g}[\Phi]^{2\Longrightarrow 1}$ и, следовательно, $\hat{g}(\psi)$ будет отвечать $h(\varphi) \in L_{\mathcal{L}_1^{\mathcal{L}2}}$. Остальное очевидно. Q.E.D.

ПРИМЕР 42. *Возможная переводимость трехзначной логики* $\mathbf{P}^1$ *в классическую логику.*

- $\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1} = \langle \Sigma_{\mathbf{P}^1}, \vdash_{\mathbf{P}^1} \rangle$ (трехзначное паранепротиворечивое исчисление $\mathbf{P}^1$ из [8]), где $\Sigma^0_{\mathbf{P}^1}$ является множеством пропозициональных переменных, $\Sigma^1_{\mathbf{P}^1} = \{\neg_{\mathbf{P}^1}\}$, $\Sigma^2_{\mathbf{P}^1} = \{\supset_{\mathbf{P}^1}, \wedge_{\mathbf{P}^1}, \vee_{\mathbf{P}^1}\}$ и $\vdash_{\mathbf{P}^1}$ есть оператор присоединения следствий трехзначной логики $\mathbf{P}^1$, такой, что

1. $\varphi \wedge_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi$ и $\varphi \wedge_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \psi$;
2. $\varphi \vee_{\mathbf{P}^1} \psi \vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi, \psi$;
3. $\varphi \supset_{\mathbf{P}^1} \psi, \varphi \vdash_{\mathbf{P}^1} \psi$;
4. $\vdash_{\mathbf{P}^1} \varphi, \neg_{\mathbf{P}^1}\varphi$.

- $\mathcal{L}_{PC} = \langle \Sigma_{PC}, \vdash_{PC} \rangle$ (классическая логика), где Σ^0_{PC} есть множество пропозициональных переменных, $\Sigma^1_{PC} = \{\neg_{PC}\}$, $\Sigma^2_{PC} = \{\supset_{PC}, \wedge_{PC}, \vee_{PC}\}$ и $\vdash_{PC}$ есть оператор присоединения следствий классической логики, такой, что

1. $\varphi \wedge_{PC} \psi \vdash_{PC} \varphi$ и $\varphi \wedge_{PC} \psi \vdash_{PC} \psi$;
2. $\varphi \vee_{PC} \psi \vdash_{PC} \varphi, \psi$;
3. $\varphi \supset_{PC} \psi, \varphi \vdash_{PC} \psi$;
4. $\vdash_{PC} \varphi, \neg_{PC}\varphi$;
5. $\varphi, \neg_{PC}\varphi \vdash_{PC}$.

Нетрудно видеть, что ограниченной возможной переводимостью $\mathcal{L}_{PC}$ в $\mathcal{L}_{\mathbf{P}^1}$ будет $\mathcal{L}^{PC}_{\mathbf{P}^1} = \langle \Sigma_{\mathbf{P}^1}, \vdash_{PC\Longrightarrow \mathbf{P}^1} \rangle$, где $\vdash_{PC\Longrightarrow \mathbf{P}^1}$ такое, что $\varphi, \neg_{\mathbf{P}^1}\varphi \vdash_{PC\Longrightarrow \mathbf{P}^1}$ тогда и только тогда, когда $\varphi*$, $\neg_{PC}\varphi* \vdash_{PC}$, где $\varphi*$ получается замещением $\mathbf{P}^1$-связок классическими (классический изоморф в $\mathbf{P}^1$).

6 Log как топос и дополняющий топос

На основании предыдущего рассмотрения мы можем прийти к выводу, что **Log** является по крайней мере биполной категорией, допускающей экспоненцирование и коэкспоненцирование. Однако что мы можем принять в качестве терминального объекта? Рассмотрим в этом качестве логическую систему $\mathcal{L}_{\mathsf{T}} = \langle \Sigma_{\mathsf{T}}, \vdash_{\mathsf{T}} \rangle$, где $\Sigma^0_{\mathsf{T}} = \{\top\}$, и $\Sigma^k_{\mathsf{T}} = \{\top^k\}$ для $k > 0$, где $\top^k$ есть k-местная постоянная функция (т.е. бинарная, тернарная и т.д.), а $\vdash_{\mathsf{T}}$ является максимальным оператором присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно). Конечно, $\mathcal{L}_{\mathsf{T}}$ будет терминальным объектом лишь с точностью до эквивалентности. В качестве начального объекта можно использовать логическую систему с пустой сигнатурой. Таким образом, фактически **Log** является декартово бизамкнутой категорией.

УТВЕРЖДЕНИЕ 43. ***Log*** *является топосом.*

Доказательство. Положим $\Omega = \langle \Sigma_\Omega, \vdash_\Omega \rangle$, где $\Sigma^0_\Omega = \{\top, \bot\}, \Sigma^k_1 = \{\top^k, \bot^k\}$ для $k > 0$ и $\vdash_\Omega$ является одновременно максимальным $\top$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\top$ и $\top^k$) и максимальным $\bot$-отношением присоединения следствий (позволяющим вывести все что угодно из $\bot$ и $\bot^k$). В качестве классификатора подобъектов *true* мы имеем $true(\Sigma_{\mathsf{T}}) = \Sigma_{\mathsf{T}} \subseteq \Sigma_\Omega$ и $true(\vdash_{\mathsf{T}}) = \vdash_{\mathsf{T}} \subseteq \vdash_\Omega$, т.е. *true* сохраняет $\top$-максимальность. Q.E.D.

Тем не менее это еще не окончательный результат, несмотря на то что декартова козамкнутость **Log**, по-видимому, закрывает дорогу для дальнейшего продвижения в нужном нам направлении. Но здесь на помощь приходит интересный факт, касающийся классификатора подобъектов: К. Мортенсен в [11] ввел понятие *дополняющего* классификатора как инструмента рассмотрения паранепротиворечивости в теории топосов. Его определение выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44. В категории $\mathcal{C}$ *дополняющий классификатор* является $\mathcal{C}$-стрелкой $false : 1 \to \Omega$, где для любой мономорфной стрелки $f : a \rightarrowtail b$ имеется одна и только одна $\mathcal{C}$-стрелка $b \to \Omega$, обозначаемая $\bar{\chi}_f$, превращающая следующую диаграмму в амальгамирование в $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & b \arrow[d, "\bar{\chi}_f"] \\ 1 \arrow[r, "false"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Мортенсен показал, что дополняющий классификатор в топосе **Set** неотличим (с помощью теоретико-категорных методов) от стандартного классификатора подобъектов, что они изоморфны. Таким образом, в **Set** всегда присутствует паранепротиворечивость ввиду наличия обоих типов классификаторов подобъектов. Более того, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 45. *Дополняющие топосы отвечают паранепротиворечивой логике, основывающейся на брауэровой алгебре, аналогично тому как топосы отвечают интуиционистской логике, основывающейся на алгебре Гейтинга.*

Поскольку топосы отвечают интуиционистской логике, отражая структуру алгебры Гейтинга в строении классификатора подобъектов, то в дополняющем топосе дополняющий классификатор отражает соответственно структуру брауэровой алгебры. Допуская коэкспоненциальность, категория **Log** должна также быть дополняющим топосом, что подразумевает декартово козамкнутую категорию с дополняющим классификатором. Как следствие нам нужно рассмотреть только диаграмму дополняющего классификатора Мортенсена.

УТВЕРЖДЕНИЕ 46. ***Log** является дополняющим топосом.*

Доказательство. Для дополняющего классификатора объектов $false$ мы имеем $false(\Sigma_\top) = \Sigma_\bot \subseteq \Sigma_\Omega$ и $false(\vdash_\top) = \vdash_\bot \subseteq \vdash_\Omega$, т.е. $false$ преобразует максимальное $\top$-отношение присоединения следствий в максимальное $\bot$-отношение присоединения следствий. Остальное очевидно. Q.E.D.

Выражаясь более точно, **Log** будет *паранепротиворечивым дополняющим топосом.* Фактически глобальные структуры топоса и дополняющего топоса накладываются на универсум универсальной логики, если мы в качестве последней подразумеваем общую теорию логических систем. Заметим, что эти структуры контекстуально обусловлены введенным отношением эквивалентности.

Литература

[1] *Васюков В.Л.* Проблема структуры универсальной логики // Логические исследования. Вып. 13. М., 2006. С.95-114.

[2] *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. М., 1983.

[3] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М., 1972.

[4] *Baader F. and Schulz K. U.* (eds.). Frontiers of combining systems // Applied Logic Series. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996. Papers from the First International Workshop (FroCoS'96) held in Munich, March 26-29, 1996.

[5] *Béziau J.-Y., de Freitas R.P., Viana J.P.* What is Classical Propositional Logic? (A Study in Universal Logic) // Logical Investigations. Vol. 8. 2001. P. 266-277.

[6] *Béziau J.-Y.* From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic // Logica Universalis / *J.-Y. Béziau* (ed.). Basel, 2005. P. 3-18.

[7] *Caleiro C., Gonçalves R.* Equipollent Logical Systems // Logica Universalis / J.-Y. Béziau (ed.). Basel, 2005. P. 99-111.

[8] *Carnielli W.* Possible-Translations Semantics for Paraconsistent Logics // Frontiers of Paraconsistent Logic / D. Batens et al (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Herfordshire, 2000. P.149-163.

[9] *J.M. Font, R. Jansana, D. Pigozzi.* A Survey of Abstract Algebraic Logic // Studia Logica. Vol. 74, No 1/2. 2003. P.13-97.

[10] *Lambek J., Scott P.J.* Introduction to higher order categorical logic. Cambridge, 1986.

[11] *Mortensen C.* Inconsistent Mathematics. Dordrecht, 1995.

[12] *Rasga J., Sernadas A., Sernadas C., and Viganò L.* Fibring labelled deduction systems // Journal of Logic and Computation. Vol. 12, № 3. 2002. P. 443–473.

[13] *Rauszer C.* A Formalization of the Propositional Calculus of H-B-logic // Studia Logica. Vol. 33. № 1. 1973. P. 23–34.

[14] *Sernadas A., Sernadas C., Caleiro C.* Fibring of Logics as a Categorial Construction // Journal of Logic and Computation. Vol. 9. № 2. 1999. P. 149–179.

[15] *Wójcicki R.* Theory of Logical Calculi // Synthese Library. Vol. 199. Dordrecht, 1988.